-SUP- en poche

ÉCO

L1 / L2

2e édition

Mathématiques pour l'économie en 19 fiches

Jean-François Caulier

✔ Résumés de cours

✔ 40 exercices avec corrigés

✔ 380 exercices en ligne

✔ Conseils et astuces

+ EN LIGNE

OFFERT

• 380 QCM interactifs avec corrigés

de boeck SUPÉRIEUR

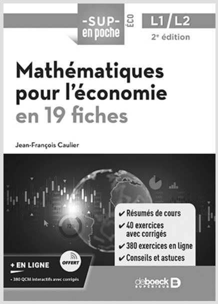
Mathématiques pour l'économie en 19 fiches

deboeck SUPÉRIEUR

DANS LA MÊME COLLECTION

Sup en poche est une collection destinée aux étudiants du 1er cycle, essentiellement en Licence 1 et 2. Son objectif est de permettre à l'étudiant de réviser et s'entraîner en vue de réussir ses examens. Chaque ouvrage est composé de fiches proposant des cours résumés suivis d'exercices corrigés pas à pas.

Conseiller scientifique : David MOUREY



-SUP- en poche

ÉCO

L1 / L2

2e édition

Mathématiques pour l'économie en 19 fiches

Jean-François Caulier

de boeck SUPÉRIEUR

Repérez les ressources numériques dans votre livre

➢ QCM interactifs avec corrigés

lienmini.fr/ressourcesnum-dbs

Accédez directement à votre ressource :

Flashez le code avec votre téléphone ou votre tablette

OU

Tapez l'URL dans votre navigateur

2e édition

Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : août 2023
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2023/13647/112

ISSN : 2566-2708
ISBN : 978-2-8073-5248-3

Sommaire

Introduction 7

Partie 1 Fondamentaux

1 Les ensembles : théorie naïve 11
2 Logique et raisonnement 25
3 Relations, applications et fonctions 35
4 Topologie de $\mathbb{R}^n$ 45

Partie 2 Analyse

5 Limites et continuité 57
6 Dérivation 77
7 Utilisations de la dérivée 87
8 Fonctions usuelles 107
9 Suites numériques 129
10 Intégration 145
11 Fonctions de plusieurs variables 159
12 Optimisation de fonctions de plusieurs variables 177

Partie 3 Algèbre linéaire

13 Les matrices 193
14 Déterminants 209
15 Rang et inversion de matrice 223
16 Systèmes d'équations linéaires 233
17 Diagonalisation 243

18 Formes quadratiques 255
19 Théorie des réseaux 269

Bibliographie 293
Index 295

Introduction

De nombreuses situations analysées en économie reposent sur un modèle formalisé ayant recours aux outils mathématiques. Les mathématiques facilitent le traitement d'informations complexes et autorisent un raisonnement rigoureux. Tant la microéconomie que la macroéconomie font appel aux techniques d'optimisation, l'algèbre linéaire, l'étude de suites numériques, etc.

F.A.Q.

Cet ouvrage est-il un manuel ?

Non. Un manuel est en général écrit pour permettre l'autoapprentissage et présente la matière de manière plus fouillée grâce à de nombreux exemples et illustrations. De plus, aucun théorème n'est démontré ici. Et l'ensemble des thèmes abordés nécessiterait sans doute un manuel de plus de 1000 pages. Par contre, il y a une longue liste de manuels en bibliographie où toutes les démonstrations se retrouvent.

Cet ouvrage ne comporte-t-il que des définitions ?

Non. S'il n'est pas tout à fait un manuel, il ne se résume pas non plus à une liste de définitions et théorèmes. Les concepts principaux sont expliqués et illustrés au moyen d'exemples. Cet ouvrage est donc à mi-chemin entre de simples fiches et un manuel complet.

Est-ce que tout mon programme de mathématiques pour l'économie est abordé ?

Le sacro-saint principe à l'université est la liberté complète donnée à l'enseignant pour constituer son programme. Et c'est mieux ainsi. En effet, seuls les enseignants-chercheurs sont à même de connaître la matière adéquate à couvrir. C'est pourquoi nous avons consulté tous les manuels disponibles, les programmes de cours des différentes universités françaises, belges, suisses et même canadiennes afin de constituer nos fiches. Par contre, pour le CAPES et l'agrégation d'économie, un programme officiel existe et l'entièreté du programme 2019 de mathématiques est couverte ici.

Dois-je maîtriser toutes les fiches pour réussir mes cours de maths ?

Oui et non. Normalement, les thèmes abordés ici représentent plus que le programme habituellement couvert sur les deux premières années d'université. Néanmoins, il se peut que votre enseignant ait abordé un thème que nous avons oublié ou choisi d'oublier, car peu abordé en général. Quoi qu'il en soit, l'ouvrage que vous tenez entre vos mains vous secondera utilement lors de vos études et dans la réalisation des exercices demandés par vos enseignants. Un concept oublié ? Un coup d'oeil dans l'index et vous retrouverez facilement sa définition.

Je pense avoir vu une faute. Est-ce possible ?

Oui. Malgré tout le soin apporté au moment de la rédaction et lors de la relecture, l'auteur n'est pas infaillible et son doigt a pu glisser. Il en assume seul l'entière responsabilité. Envoyez un mail pour lui signaler à jean-francois.caulier@univ-paris1.fr. Il vous en sera très reconnaissant !

Partie 1

Fondamentaux

SOMMAIRE

1 Les ensembles : théorie naïve
2 Logique et raisonnement
3 Relations, applications et fonctions
4 Topologie de $\mathbb{R}^n$

COURS 1 Les ensembles : théorie naïve

[MOTS-CLÉS : cardinal, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence ensembliste et symétrique, produit cartésien]

DÉFINITION

La notion d'**ensemble** est essentielle, car elle peut servir de point de départ à l'étude de toute branche des mathématiques. Elle est également omniprésente en économie : un marché est un ensemble d'offreurs et de demandeurs, le PIB (Produit Intérieur Brut) est la valeur marchande de l'ensemble des biens et services produits dans un pays sur une période donnée, la masse monétaire M1 comprend l'ensemble des pièces et billets de banque ainsi que les dépôts à vue…
La **théorie** dite ***naïve*** des ensembles, où les notions d'ensemble, d'élément et d'appartenance sont considérées comme primitives, est à distinguer de la **théorie axiomatique** des ensembles.

1 Vocabulaire

- Un **ensemble** est une collection déterminée d'objets appelés **éléments** qui répond à deux conditions :
  1. un élément x **appartient** à un ensemble E, que l'on note $x \in E$, ou n'appartient pas à un ensemble E, que l'on note $x \notin E$;
  2. un ensemble E ne peut jamais faire partie de ses éléments.

Le paradoxe du barbier. Cette parabole, introduite par le mathématicien Bertrand Russel [a], permet de comprendre l'impossible existence d'un ensemble de tous les ensembles possibles. Dans un village, le maire impose au seul barbier de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Le barbier se retrouve devant une impossibilité. S'il ne se rase pas lui-même, le règlement lui ordonne de se raser lui-même. S'il se rase lui-même, il viole le règlement puisqu'il ne peut raser que les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes.

a. Logicien et philosophe anglais (1872-1970).

- Le **cardinal** d'un ensemble **fini** E, noté $\#E$, est le nombre d'éléments que contient E. Un ensemble est **infini** s'il dispose d'une infinité d'éléments. On distinguera les ensembles infinis *dénombrables* (tels que $\mathbb{N}$) des ensembles infinis *non dénombrables* (tels que $\mathbb{R}$).

- Un ensemble peut se définir soit en **extension**, en dressant la liste de ses éléments entre accolades dans un ordre arbitraire, soit en **compréhension**, en spécifiant la propriété caractéristique des éléments qui le composent.
- L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$, est le seul ensemble qui ne contient aucun élément : $\#\emptyset = 0$.
- Il est souvent utile de spécifier l'**ensemble référentiel** ou l'**univers du discours**, en général noté Ω ou U, composé de tous les éléments pouvant servir à la construction d'ensembles.

Remarque

L'ensemble référentiel dépend du contexte étudié. Il ne s'agit en aucun cas de l'ensemble des ensembles imaginables. Ce dernier étant exclu par la seconde condition : un tel ensemble devant nécessairement se contenir lui-même, il n'existe donc pas.

Remarque

En statistiques, on appelle **population** l'ensemble référentiel comprenant tous les éléments auxquels se rapportent les données étudiées. Dans ce contexte, les éléments sont des **individus** ou **unités statistiques**. Lorsque la population présente une taille trop élevée, la collecte d'informations se réalise sur une partie de la population. Ce sous-ensemble est appelé un **échantillon**.

- Les **ensembles numériques** utilisés en mathématiques ont une notation spécifique :
  - $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$: l'ensemble des **entiers naturels** ;
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1,0,1,2\ldots\}$: l'ensemble des **entiers relatifs** ;
  - $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p$ et q sont des entiers relatifs et $q \neq 0\}$: l'ensemble des **nombres rationnels** ;
  - $\mathbb{R}$: l'ensemble des **nombres réels** ;
  - $\mathbb{C}$: l'ensemble des **nombres complexes**.

  On définit $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs (et de façon similaire avec les autres ensembles numériques).

Exemple 1 : L'ensemble $I = \{1,3,5,7,9\}$, défini en extension, peut se définir en compréhension $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10$ et n est impair$\}$ ou encore $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}\ ;\ k < 5\}$. L'ensemble I dispose de 5 éléments : $\#I = 5$.

2 Relations entre ensembles

Il s'agit ici des relations en tant qu'opérateurs permettant la comparaison de deux ou plusieurs ensembles entre eux.

2.1 L'inclusion

Si tout élément d'un ensemble A appartient également à un ensemble B, alors l'ensemble A est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de B, noté $A \subseteq B$ et qui se lit « A est inclus dans B ». Si certains éléments de B n'appartiennent pas à A, alors A est un sous-ensemble strict de B, noté $A \subset B$. On peut également noter $B \supseteq A$ et lire « B contient A », avec le symbole « $\supset$ » pour la version stricte.

Exemple 2 : Quelques résultats fondamentaux :

– Quel que soit l'ensemble U, on a toujours $\emptyset \subseteq U$.
– $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
– Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, alors $A = B$. La relation d'inclusion est *antisymétrique*.

2.2 L'ensemble des parties d'un ensemble

On définit un ensemble dont les éléments sont à leur tour des ensembles : il s'agit des sous-ensembles d'un ensemble A. L'ensemble des parties d'un ensemble fini A se note $\mathcal{P}(A)$.

Exemple 3 : Soit $A = \{1,2,3\}$. Alors,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

Exemple 4 : En probabilités, l'ensemble Ω est appelé **univers** et représente tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Un **évènement** est un sous-ensemble de Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$ représente l'ensemble des évènements possibles. Ainsi, si l'expérience consiste au lancer d'une pièce de monnaie, il y aura 4 évènements possibles : pile, face, pile ou face, ni pile ni face. Les deux premiers sont des évènements élémentaires, le troisième est un évènement certain et le dernier est un évènement impossible.

3 Opérations sur les ensembles

3.1 Réunion

Soit deux ensembles A et B. Leur réunion est l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

avec « ou » dans le sens inclusif (c'est-à-dire « et/ou »). La réunion se généralise à plus de deux ensembles. Soit n ensembles $A_1, A_2, \ldots A_n$. Leur réunion se note $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

3.2 Intersection

Soit deux ensembles A et B. Leur intersection est l'ensemble des éléments qui appartiennent aux deux ensembles :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Lorsque deux ensembles n'ont aucun élément commun, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$, les deux ensembles sont dits **disjoints**. L'intersection peut se définir sur plus de deux ensembles. Soit n ensembles $A_1, A_2, \ldots A_n$. Leur intersection se note $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

3.3 Complémentaire

Pour définir le complémentaire d'un ensemble A, il est nécessaire de connaître l'ensemble référentiel. Soit Ω le référentiel et l'ensemble A. Le complémentaire de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments du référentiel qui n'appartiennent pas à A. D'autres notations sont plus explicites sur le référentiel utilisé et sont à privilégier lorsque l'on souhaite éviter toute ambiguïté : $\mathcal{C}_\Omega A$ ou A^c_Ω ou encore ${}^cA$.

3.4 Différence ensembliste

Soit deux ensembles A et B. Leur différence est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

3.5 Différence symétrique

Soit deux ensembles A et B. Leur différence symétrique est l'ensemble des éléments qui appartiennent exclusivement à l'un des deux ensembles seulement :

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

3.6 Produit cartésien

Soit deux ensembles A et B non vides. Le produit cartésien de A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples ordonnés d'éléments de A et d'éléments de B :

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

On peut généraliser cette définition à plus de deux ensembles. Soit n ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Le produit cartésien de ces n ensembles non vides est l'ensemble

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Cet ensemble est constitué des n-uplets $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Dans le cas particulier de n ensembles identiques, c'est-à-dire si $A_i = A$ pour tout $i = 1,\ldots,n$, on note A^n ce produit cartésien.

Remarque

Ne pas confondre n-uplets et ensembles de cardinalité n. Dans un n-uplet, la liste est ordonnée entre parenthèses. Dans un ensemble, la liste des éléments se réalise dans un ordre arbitraire entre accolades. Ainsi, le couple (a_1,a_2) est différent du couple (a_2,a_1) (sauf si $a_1 = a_2$) alors que les ensembles $\{a_1,a_2\}$ et $\{a_2,a_1\}$ sont égaux.

Exemple 5 : Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$:

– L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ des couples (x,y) de deux nombres réels peut se représenter dans le plan muni d'un système d'axes de coordonnées « cartésiennes » (abscisse et ordonnée).
– L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est constitué des n-uplets $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ où chaque x_i pour $i = 1,\ldots,n$ est élément de $\mathbb{R}$. Chaque n-uplet est un **vecteur** de l'espace $\mathbb{R}^n$.

Exemple 6 : L'expérience de l'exemple 4 consiste à lancer une pièce de monnaie et observer le résultat. L'ensemble des évènements élémentaires est $S = \{P,F\}$, soit pile (P), soit face (F). Si l'expérience consiste à lancer deux fois la pièce, l'ensemble des évènements élémentaires est $S \times S = S^2 = \{(P,P),(F,F),(P,F),(F,P)\}$.

3.7 Partitions d'ensemble

Soit S un ensemble non vide. Une collection $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sous-ensembles de S forment une **partition** de S si ces 3 conditions sont remplies :

1. l'ensemble vide ne fait pas partie de la liste : $A_i \neq \emptyset$ pour $i = 1,\ldots n$;

2. les sous-ensembles sont disjoints deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$;
3. leur union est l'ensemble S : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$.

3.8 Diagramme de Venn-Euler

Les différentes opérations peuvent se représenter de manière schématique au moyen d'un diagramme de Venn-Euler pourvu que le nombre d'ensembles représentés ne soit pas trop important. Les éléments peuvent ou non apparaître explicitement sur la représentation.

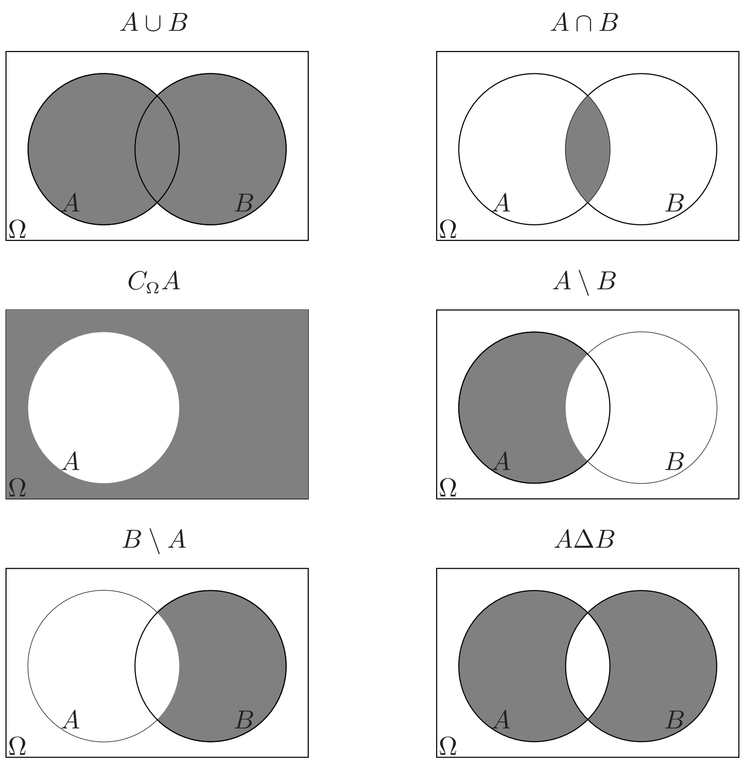


Figure 1.1 Diagrammes de Venn-Euler

3.9 Propriétés des opérateurs

Les opérateurs sur les ensembles répondent à quelques lois et forment un système algébrique appelé **algèbre de Boole**.

Dans ce qui suit, Ω est le référentiel, A,B et C trois ensembles non vides.

1. Lois sur la réunion et l'intersection :
   - $A \cap A = A$
   - $A \cup A = A$
   - $A \cap B = B \cap A$
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   - $A \cap \emptyset = \emptyset$
   - $A \cup \Omega = \Omega$
   - $A \cup \emptyset = A$
   - $A \cap \Omega = A$
2. Lois sur les complémentaires :
   - $\bar{\bar{A}} = A$
   - $A \cup \bar{A} = \Omega$
   - $A \cap \bar{A} = \emptyset$
   - $\overline{\Omega} = \emptyset$
   - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
3. Lois sur les différences :
   - $A \setminus B = A \cap \bar{B}$
   - $\Omega \setminus A = \bar{A}$
   - $A \setminus \Omega = \emptyset$
   - $A \setminus \emptyset = A$
   - $\emptyset \setminus A = \emptyset$
   - $A \setminus A = \emptyset$
   - $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
   - $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
   - $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$
   - $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

4 Application : l'indice de pouvoir de Banzhaf

La théorie des ensembles fournit un moyen simple de calculer un certain type de pouvoir dans une assemblée prenant des décisions à majorité simple ou qualifiée. Il s'agit de l'indice de pouvoir de Banzhaf[1]. Sa méthode de calcul est la suivante :

- Soit N une assemblée de cardinalité $n \in \mathbb{N}^*$, composée d'agents, de partis politiques, de pays, etc.
- Un sous-ensemble $S \subseteq B$ est appelé **coalition**.
- Chaque agent i dispose d'un certain nombre de **voix** ou sièges $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots ,n$.
- Pour toute coalition S, on définit $x_S = \sum_{i \in S} x_i$ le nombre total de voix dont disposent les agents appartenant à la coalition S.
- Les décisions sont adoptées à la majorité q. Par exemple, si $q = x_N/2$, les décisions sont prises à majorité simple. Si une coalition d'agents S est en faveur de la décision et que $x_S > q$, la décision est adoptée. Autrement, elle est rejetée.

1. Voir Banzhaf, John F. (1965), *Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis*, Rutgers Law Review 19 (2) : 317–343.

- Une coalition S telle que $x_S > q$ est une **coalition gagnante**. Autrement, elle est perdante.
- Un agent i est **critique** pour une coalition gagnante S si $S \setminus \{i\}$ est perdante. Autrement dit, un agent critique rend perdante une coalition gagnante par son départ.
- L'**indice de pouvoir de Banzhaf** d'un agent i est le nombre total de positions critiques de cet agent sur l'ensemble des coalitions gagnantes.

En 1958, le Conseil de la Communauté Économique Européenne (CEE) était composé de 6 membres : Allemagne (A), Belgique (B), France (F), Italie (I), Luxembourg (L) et Pays-Bas (P). Les grands pays (A, F et I) disposaient de 4 voix, les pays moyens (B et P) de 2 voix et 1 seule voix pour L, pour un total de 17 voix. Les décisions étaient adoptées avec 12 voix pour sur 17. Le tableau suivant reprend les 14 coalitions gagnantes sur les 64 coalitions possibles, leur total de voix et leurs membres critiques.

Coalition	Total	Membres critiques
ABFILP	17	Aucun
ABFIP	16	Aucun
ABFIL	15	A, F, I
AFILP	15	A, F, I
ABFI	14	A, F, I
AFIP	14	A, F, I
AFIL	13	A, F, I
ABFLP	13	A, B, F, P
BFILP	13	B, F, I, P
ABILP	13	A, B, I, P
AFI	12	A, F, I
ABFP	12	A, B, F, P
BFIP	12	B, F, I, P
ABIP	12	A, B, I P

Les indices de pouvoir de Banzhaf des différents pays sont 10 pour l'Allemagne, la France et l'Italie, 6 pour la Belgique et les Pays-Bas et 0 pour le Luxembourg ! La probabilité que le Luxembourg change le destin d'une décision en modifiant son vote était nulle.

Exercice 1

Soit $\boldsymbol{\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}}$, $\boldsymbol{A = \{1,3,4,5\}}$, $\boldsymbol{B = \{2,3,5,7\}}$ et $\boldsymbol{C = \{4,5,6,7\}}$.

1. Représentez ces ensembles dans un diagramme de Venn.

2. En utilisant les opérateurs de l'union, de l'intersection, de différence et de la complémentarité des ensembles A,B,C et Ω, déterminez les sous-ensembles suivants :

1. $\{5,7\}$;
2. $\{5\}$;
3. $\{4\}$;
4. $\{3,4,5,7\}$;
5. $\{8\}$;
6. $\{1,8\}$.

3. Identifiez, à l'aide du diagramme dessiné précédemment, les ensembles suivants :

1. $(A \cap B) \setminus C$;
2. $(A^c \cap B) \cap C$;
3. $(A^c \cup B^c) \cap C$;
4. $B^c \cup (A \cup B \cup C)^c$;
5. $(A \cup B^c) \cup C^c$;
6. $(A \cap B^c) \cup \Omega^c$.

Exercice 2

Le Code de la route change régulièrement et nombre d'automobilistes se font piéger. Lors d'un récent contrôle, les agents ont arrêté 300 automobilistes et ont contrôlé :

– l'usage d'une oreillette Bluetooth ;
– le respect du passage à 80km/h au lieu de 90km/h ;
– la présence de vitres sur-teintées à l'avant du véhicule.

Chaque infraction constatée est sanctionnée d'une amende de 135 €. Lors de cette opération de contrôle,

– 105 véhicules présentaient des vitres teintées ;
– 160 conducteurs dépassaient les 80 km/h ;
– 110 conducteurs utilisaient une oreillette ;
– 50 conducteurs faisaient usage d'une oreillette et avaient des vitres teintées ;
– 60 conducteurs faisaient usage d'une oreillette et dépassaient la vitesse de 80 km/h ;
– 70 véhicules dépassaient les 80 km/h et avaient des vitres teintées ;
– 20 conducteurs ont payé 405 € d'amende.

Combien de conducteurs :

– n'ont pas reçu d'amende ;
– ont dû payer 135 € ;
– ont dû payer 270 € ;
– ont payé exactement 135 € à cause de leurs vitres teintées ?

Exercice 3

Que peut-on dire des ensembles A et B lorsque :

1. $A \setminus B = B \setminus A$;
2. $(A \setminus B) \cup B = A$;
3. $A \cap B = \emptyset$;
4. $A \cap B = B$;
5. $B \cap A^c = B$.

Exercice 4

Soit A,B et C trois ensembles non vides et non disjoints deux à deux. Donnez une formule permettant de calculer $\#(A \cup B \cup C)$ au moyen des cardinaux des trois ensembles et de leurs intersections.

Exercice 5

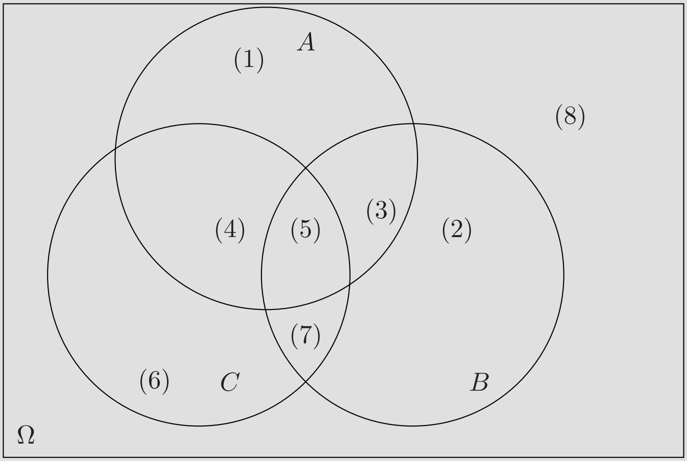
Soit $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2\}$ et $C = \{c,d\}$. Déterminez tous les triplets de $A \times B \times C$.

Exercice 6 Partition d'un ensemble

Soit a, b et c des réels, avec $a > 0$. Sous quelles conditions pour a,b et c les sous-ensembles $]0,a[$, $]-\infty,b]$, et $[c,+\infty[$ forment une partition de $\mathbb{R}$?

Exercice 1

1. Diagramme de Venn :



2. 1. $\{5,7\} = C \cap B$;
2. $\{5\} = A \cap B \cap C$;
3. $\{4\} = (A \cap C) \setminus B$;
4. $\{3,4,5,7\} = (A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C)$;
5. $\{8\} = (A \cup B \cup C)^c$;
6. $\{1,8\} = (B \cup C)^c$;

3. 1. $(A \cap B) \setminus C = \{3\}$;
2. $(A^c \cap B) \cap C = \{7\}$;
3. $(A^c \cup B^c) \cap C = \{6\}$;
4. $B^c \cup (A \cup B \cup C)^c = \{1,4,6,8\}$;
5. $(A \cup B^c) \cup C^c = \{1,2,3,4,5,6,8\}$;
6. $(A \cap B^c) \cup \Omega^c = \{1,4\}$.

Exercice 2

Pour répondre à la question, on construit un diagramme de Venn-Euler de 3 ensembles et on le remplit en partant de l'intersection commune aux 3, ensuite les intersections deux à deux, et on termine par les parties d'ensemble hors intersection. On n'oublie pas les conducteurs n'ayant commis aucune infraction (ils sont dans l'ensemble référentiel mais en dehors des ensembles).

- 85 conducteurs n'ont pas reçu d'amende ;
- 75 conducteurs ont commis exactement une seule infraction ;
- 120 conducteurs ont commis exactement deux infractions ;
- 5 véhicules contrôlés ne présentaient que les vitres teintées comme infraction.

Exercice 3

1. Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A$ et $x \notin B$. Mais puisque $A \setminus B = B \setminus A$, alors $x \in B$ et $x \notin A$ également. Puisque $x \in B$ et $x \notin B$ de même que $x \in A$ et $x \notin A$, $A \setminus B = \emptyset = B \setminus A$ et donc $A = B$.
2. Puisque $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$, alors $A \cup B = A$ signifie que $B \subseteq A$.
3. Les deux ensembles sont disjoints.
4. On a toujours $A \cap B \subseteq B$. On sait ici en plus que $B \subseteq A \cap B$, donc $B \subseteq A$.
5. $B \cap A^c = B \setminus A = B$, donc B est disjoint de A.

Exercice 4

On part de la relation des trois cardinaux : $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ et on pose $S = A$ et $T = B \cup C$:

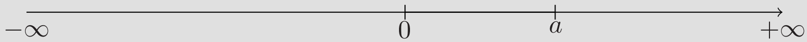
$$\begin{aligned}
&\#(A \cup (B \cup C))\\
&\quad = \#A + \#(B \cup C) - \#(A \cap (B \cup C))\\
&\quad = \#A + \#(B \cup C) - \#((A \cap B) \cup (A \cap C))\\
&\quad = \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#((A \cap B) \cup (A \cap C))\\
&\quad = \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) - \#((A \cap B) \cap (A \cap C))]\\
&\quad = \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) - \#(A \cap B \cap C)]\\
&\quad = \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Exercice 5

Chaque élément de $A \times B \times C$ consiste en un élément choisi dans A, suivi d'un élément choisi dans B et enfin un élément choisi dans C, dans cet ordre précis : $(a,1,c),(a,1,d),(a,2,c),(a,2,d),(b,1,c),(b,1,d),(b,2,c),(b,2,d)$.

Exercice 6

Une partition d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, disjointes deux à deux, et dont la réunion est l'ensemble E.



Pour déterminer une partition de $\mathbb{R}$ à partir du sous-ensemble $]0,a[$, il suffit de prendre $b = 0$ et $c = a$.
Ainsi, $b = 0 < a = c$.

Testez vos connaissances en ligne

www.lienmini.fr/52483-1

COURS 2 Logique et raisonnement

[MOTS-CLÉS : proposition, prédicat, conjonction, disjonction, implication, condition nécessaire et suffisante, quantificateur universel et existentiel]

DÉFINITION

La **logique** est un champ de recherches en mathématiques très élaboré d'un point de vue formel. En économie, seuls quelques principes fondamentaux et méthodes classiques sont utilisés de manière à structurer un raisonnement, une démonstration.

1 Vocabulaire

- Une **proposition** est un énoncé qui a pour propriété d'être soit vrai, soit faux, sans possible nuance. Une proposition ne dispose donc que d'une seule valeur logique incarnant sa vérité (V ou 1) ou sa fausseté (F ou 0), d'où l'appellation parfois utilisée de logique *binaire*.
- La **négation** d'une proposition P, notée $\neg P$ ou non-P, présente une valeur de vérité opposée à celle de P. On peut résumer ces informations dans une **table de vérité** :

P	$\neg P$
1	0
0	1

Exemple 1 : La proposition P : « un seul vendeur opère sur un marché en monopole » est vraie. La proposition $\neg P$: « plusieurs vendeurs opèrent sur un marché en monopole » est fausse.

- On appelle **prédicat** une proposition P dont la valeur logique (1 ou 0) dépend de la valeur prise par un **argument** (ou **variable**) x issu de l'ensemble de référence Ω. Le prédicat se note $P(x)$ et signifie x possède la propriété P. On détermine alors le **domaine de validité** permettant de définir les conditions (quelles valeurs de la variable) sous lesquelles la propriété est vraie.

2 Lien avec les ensembles

Un prédicat est une proposition P vraie pour certains éléments x d'un ensemble Ω. Ce prédicat est la propriété caractéristique des éléments d'un sous-ensemble A de Ω. Il s'agit d'une propriété présentée par les éléments de A, et seulement par eux. On le note :

$$A = \{x \in \Omega \mid P(x)\}.$$

La propriété $P(x)$ est vraie si et seulement si $x \in A$ et est fausse si $x \notin A$. La négation de $P(x)$, c'est-à-dire $\neg P(x)$ est le complémentaire de A dans Ω :

$$\bar{A} = \{x \in \Omega \mid \neg P(x)\}.$$

3 Connecteurs logiques

Au nombre de quatre, les principaux connecteurs logiques permettent de relier des propositions élémentaires pour en former de plus élaborées. L'objectif de la logique formelle est d'étudier la validité de raisonnements complexes.

3.1 Conjonction

La conjonction de deux propositions « P et Q », notée $(P \wedge Q)$, est une proposition vraie uniquement si les propositions P et Q sont vraies simultanément. En termes d'ensembles, si $A = \{x \in \Omega \mid P(x)\}$ et $B = \{x \in \Omega \mid Q(x)\}$, alors

$$\{x \in \Omega \mid P(x) \wedge Q(x)\} = A \cap B.$$

3.2 Disjonction

La disjonction de deux propositions « P ou Q », notée $(P \vee Q)$, est une proposition vraie si l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie. En termes d'ensembles :

$$\{x \in \Omega \mid P(x) \vee Q(x)\} = A \cup B.$$

3.3 Implication

La proposition « P implique Q », notée $(P \Rightarrow Q)$ est une proposition fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie dans tous les autres cas. Si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, alors

- P est une **condition suffisante** pour Q ;
- Q est une **condition nécessaire** pour P.

On peut également dire « si P est vraie, alors Q est vraie ». La proposition $(Q \Rightarrow P)$ est appelée **réciproque** de l'implication $(P \Rightarrow Q)$.

Remarque

En langage courant, $P \Rightarrow Q$ signifie que si P est vraie, alors Q est vraie. En logique, la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est toujours vraie lorsque P est fausse, indépendamment de la valeur de vérité de Q. Ainsi, la proposition $(P \Rightarrow Q)$ et la proposition $(\neg P \vee Q)$ ont même valeur de vérité.

En termes d'ensembles :

$$\{x \in \Omega \mid P(x) \Rightarrow Q(x)\} = A \subseteq B.$$

3.4 Équivalence

La proposition « P équivaut à Q », notée $(P \Leftrightarrow Q)$, est une proposition vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité, c'est-à-dire si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses. Si $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie, alors

- P est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour Q ;
- Q est une CNS pour P.

On dit alors « P si et seulement si Q ». En termes d'ensembles :

$$\{x \in \Omega \mid P(x) \Leftrightarrow Q(x)\} = A = B.$$

3.5 Tables de vérité

On peut résumer les informations concernant les valeurs de vérités des propositions définies ci-dessus dans des tables de vérité :

Conjonction

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjonction

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implication

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Équivalence

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

4 Quantificateurs logiques

4.1 Quantificateur universel

Si une proposition P, correspondant à une propriété caractéristique $P(x)$ de l'ensemble A, est vraie *quel que soit* l'élément x de l'ensemble Ω, on écrit

$$\forall x \in \Omega, P(x)$$

qui se lit : « pour tout élément x de Ω, la proposition P est vraie ». Dans ce cas, $A = \Omega$.

Exemple 2 : Si Y_n représente le PIB de l'année $n \in \mathbb{N}$, la phrase

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} \geq Y_n$$

se lit « quelle que soit la valeur de n, Y_{n+1} est au moins aussi grand que Y_n ». En d'autres termes, le PIB connaît une croissance chaque année.

4.2 Quantificateur existentiel

Si une proposition P, correspondant à une propriété caractéristique $P(x)$ de l'ensemble A, est vraie pour *au moins un* élément x de l'ensemble Ω, on écrit

$$\exists x \in \Omega, P(x)$$

qui se lit : « il existe au moins un élément de Ω tel que la proposition P est vraie ». Dans ce cas $A \neq \emptyset$.

Exemple 3 : Avec Y_n, le PIB de l'année $n \in \mathbb{N}$, la phrase

$$\exists n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} < Y_n$$

se lit « il existe une valeur de n telle que Y_{n+1} est strictement inférieur à Y_n ». En d'autres termes, le PIB a régressé au moins une fois.

Une variante du quantificateur existentiel est la suivante :

$$\exists! x \in \Omega, P(x)$$

qui se lit « il existe *un et un seul* élément de Ω tel que la proposition P est vraie ». Dans ce cas $A = \{x\}$.

4.3 Négation des quantificateurs

Pour nier une phrase quantifiée, on utilise l'autre quantificateur :

$$\neg \left(\forall x \in \Omega, P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in \Omega, \neg P(x)\right)$$
$$\neg \left(\exists x \in \Omega, P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \Omega, \neg P(x)\right)$$

-SUP- en poche ÉCO

L1 / L2

2e édition

Cet ouvrage propose une synthèse des principales thématiques relatives aux principes fondamentaux des mathématiques économiques. Vous y trouverez les différents outils nécessaires à la formalisation tant en microéconomie, macroéconomie qu'économétrie. Les fiches de cours illustrées suivies d'exercices corrigés permettent la bonne compréhension des notions fondamentales et la vérification de l'acquisition des connaissances.

Chaque fiche contient :

> des **résumés de cours**.
> des **points de méthodologie** et des astuces.
> des **exemples et applications** pour illustrer les notions ou apprendre à résoudre les questions.
> des **mots clefs et des définitions en début de fiche**.
> des **exercices corrigés**.

RESSOURCES NUMÉRIQUES OFFERTES

Exercices numériques avec corrigés :
- **QCM interactifs**

Jean-François Caulier

est docteur en sciences économiques et de gestion et actuellement maître de conférences à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne. Il y enseigne essentiellement les mathématiques et la microéconomie. Il est également vice-président délégué Stratégie et innovations numériques.

À LIRE AUSSI DANS LA COLLECTION

18,95 €
ISBN : 978-2-8073-5248-3

9 782807 352483

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®