MATHS

Cours approfondi
Exercices
Problèmes

4^{e}

Laurent Lemaire
Anne Paradas Arroyo

ellipses

CHAPITRE 0

Règles en mathématiques

Repères historiques. Vers 3000 avant J.-C., l'écriture apparaît dans les civilisations mésopotamienne, égyptienne et chinoise. On y trouve aussi les premières traces d'existence de techniques mathématiques :

- systèmes de numération et méthodes de calcul pour la gestion administrative (gestion du calendrier, transaction commerciale, collecte des impôts...) ;
- géométrie élémentaire pour résoudre les questions de mesure (volume de grain et aire des champs, architecture . . .).

Les techniques mathématiques utilisées sont des **procédures algorithmiques** indiquant chaque étape à réaliser pour parvenir au résultat souhaité. Elles sont données ou montrées uniquement sur des exemples sans généralisation, ni démonstration.

Pour les Grecs au contraire, les mathématiques deviennent progressivement l'étude des propriétés d'objets géométriques ou numériques. EUCLIDE (3e siècle av. J.-C.) commence par énoncer l'ensemble des postulats sur lesquels sa théorie mathématique repose, puis il énonce et démontre une succession de propositions – la démonstration ne reposant que sur ce qui a été admis ou déjà prouvé auparavant –.

Explication : Le mot **mathématique** vient du grec *mathêma* signifiant « ce qui est enseigné » quand il s'agit de « science, connaissance ».

I Règles en mathématiques

1 Généralités

Faire des mathématiques c'est poser et, si possible, résoudre des problèmes.

Explication : Le mot **problème** vient du latin *problema* signifiant « question à résoudre », lui même emprunté du grec *problêma*. Le préfixe *pro* signifie « devant », la racine *blê* signifie « lancer », problème signifie donc « objet lancé devant, obstacle ».

La résolution de problèmes en mathématiques s'appuie sur le raisonnement.

Explication : Le mot **raisonnement** vient du latin *ratio* signifiant « calcul, compte » et par extension « faculté de compter ». CICÉRON (106–43 av. J.-C.) donne aussi à *ratio* le sens de « le pourquoi d'une chose ».
Le mot raisonnement prend au 17e siècle le sens : « opération de l'esprit passant d'un jugement à un autre pour aboutir à une conclusion ».

Cela signifie que les énoncés doivent être bien formés et non ambigus. La **rédaction** a pour but de faire comprendre clairement au lecteur les étapes de résolution du problème. Par exemple, **une succession de calculs**, sans aucune phrase en français, ne permet pas de comprendre le raisonnement. De même, **une figure géométrique** doit être codée avec les données du problème (et non avec ce que l'on veut prouver).

Explication : Le mot **démonstration** vient du latin *demonstratio* signifiant « action de montrer, description », il remplace le mot de l'ancien français *demostraison* (au 12e siècle) qui correspond au sens actuel d'un raisonnement déductif strict aboutissant à établir la vérité d'une proposition.
Le verbe **prouver** vient du latin *probare* signifiant « trouver bon, approuver » mais aussi « rendre croyable, démontrer », il donne le mot **preuve** qui désigne ce qui est susceptible d'établir la réalité, la vérité d'une chose, spécialement dans un contexte juridique.

Règles pour les démonstrations en mathématiques

R1 Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux. C'est ce que l'on appelle la **valeur de vérité** de l'énoncé.

R2 Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver que cet énoncé est vrai.

R3 Un exemple qui ne vérifie pas un énoncé suffit à prouver que cet énoncé est faux. Cet exemple est appelé un **contre-exemple**.

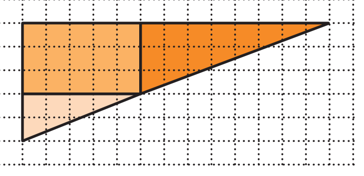
R4 Une constatation ou une mesure sur un dessin ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.

Exemple 1. Considérons l'énoncé mathématique :

« Un nombre qui se termine par 3 est divisible par 3 ».

D'après **R1** cet énoncé est soit vrai soit faux, mais pas les deux en même temps !
On remarque que 3, 33 et 63 se terminent par 3 et sont divisibles par 3 mais d'après **R2** ces exemples ne suffisent pas à prouver que l'énoncé est vrai.
En revanche, 13 se termine par 3 mais n'est pas divisible par 3 et d'après **R3** cela prouve que l'énoncé est FAUX – c'est un contre-exemple –.

Exemple 2. Un élève affirme : « L'aire de la figure est $\dfrac{5\times 13}{2} = 32,5$ ».



Or quand on calcule la somme des aires des trois figures colorées on obtient : $\dfrac{2\times 5}{2} + 3\times 5 + \dfrac{3\times 8}{2} = 32$.
C'est une illustration de la règle **R4** car dans son calcul, l'élève considère que la figure est un triangle ce qui n'est pas le cas – on peut le prouver –.

Conjecture

On appelle **conjecture** un énoncé mathématique dont la valeur de vérité n'est pas connue.

Explication : Le mot **conjecture** vient du latin *conjectura*, dérivé de *conjicere* signifiant « jeter ensemble » qui prend ensuite le sens de « combiner dans l'esprit, présumer ».

Pour déterminer la valeur de vérité d'une conjecture il faut :
- soit construire un **contre-exemple**, auquel cas on conclut que la **conjecture est fausse** (**R3**) ;
- soit construire une **preuve**, auquel cas on conclut que la **conjecture est vraie**.

2 Théorème

Théorème/proposition

- Un **théorème** est un énoncé mathématique vrai (en tout cas, démontré comme tel).
- Une **proposition** désigne souvent un théorème intermédiaire ou de moindre importance.

Explication : Le mot **théorème** vient du grec *theorêma* signifiant « ce que l'on peut contempler », « objet d'étude ».
Le mot **proposition** vient du latin *propositio* lui même issu de *proponere* signifiant « action de mettre sous les yeux, de présenter ». Au 13^{e} siècle, une proposition est ce que l'on soumet au consentement. C'est au 17^{e} siècle que le mot devient, en mathématiques, l'énoncé d'une vérité à démontrer.

En général, un théorème peut s'énoncer sous plusieurs formes équivalentes :

- « ***Si*** *on a la condition A* ***alors*** *on a la condition B* » ;
- « *Toutes les situations qui vérifient la condition A vérifient aussi la condition B* » ;
- « *La condition A* ***implique*** *la condition B* ».

Méthode **pour utiliser un théorème**, il faut avoir une situation où la condition A est vérifiée.

Exemple 3. Le théorème « ***Si*** *un nombre entier se termine par* 0 ***alors*** *il est divisible par* 5. » signifie que « *Tous les nombres entiers qui se terminent par* 0 *sont divisibles par* 5. ».

Par exemple, **comme** le nombre 560 se termine par 0, **on en conclut que** 560 est divisible par 5.

Méthode **pour prouver « *Si on a la condition A alors on a la condition B* ».**
Un raisonnement direct permet de conclure en supposant que l'on a la condition A, on démontre en utilisant les propositions connues que l'on a la condition B.

3 Contraposée, réciproque

Avec un théorème de la forme « ***Si*** *on a la condition A* ***alors*** *on a la condition B.* », on peut lui associer deux autres énoncés :

- sa **contraposée** : « ***Si*** *on n'a pas la condition B* ***alors*** *on n'a pas la condition A* ».

  Remarque : La contraposée d'un théorème est toujours vraie.

  Démonstration : On a le théorème : « ***Si*** *on a la condition A* ***alors*** *on a la condition B* ».
  On considère que l'on n'a pas la condition B.

  Raisonnons par l'absurde *en supposant que l'on a la condition A*. Le théorème permet de dire que l'on a alors la condition B. Or, d'après **R1**, on ne peut pas avoir la condition B et son contraire ensemble. Ce que l'on a supposé est donc faux et on peut conclure que l'on n'a pas la condition A.

  On a donc prouvé que « ***Si*** *on n'a pas la condition B* ***alors*** *on n'a pas la condition A* ».

- sa **réciproque** : « ***Si*** *on a la condition B* ***alors*** *on a la condition A* ».

  La réciproque d'un théorème n'est pas toujours vraie.

  Explication : Le mot **contraposée** apparaît en 1862 dans une traduction d'un ouvrage en allemand du philosophe Emmanuel KANT (1724–1804). Le mot **contraposition** est dérivé du mot position venant du latin *positio* et de *ponere* « placer, poser », avec le préfixe *contra-*.
  Le mot **réciproque** vient du latin *reciprocus* signifiant « qui va en arrière après avoir été en avant » ou « réfléchi ».

Exemple 4. L'énoncé « ***Si*** *un nombre entier se termine par* 0 ***alors*** *il est divisible par* 5. » est VRAI – c'est donc un théorème –.

Sa contraposée « ***Si*** *un nombre entier n'est pas divisible par* 5 ***alors*** *il ne se termine pas par* 0. » est VRAIE.

Sa réciproque « ***Si*** *un nombre entier est divisible par* 5 ***alors*** *il se termine par* 0. » est FAUSSE puisque 15 est divisible par 5 mais ne se termine pas par 0.

Exemple 5. L'énoncé « ***Si*** *un nombre entier est divisible par* 3 ***alors*** *la somme de ses chiffres est divisible par* 3. » est VRAI – c'est donc un théorème –.

Sa contraposée « ***Si*** *la somme de ses chiffres d'un nombre entier n'est pas divisible par* 3 ***alors*** *ce nombre n'est pas divisible par* 3. » est VRAIE.

Sa réciproque « ***Si*** *la somme de ses chiffres d'un nombre entier est divisible par* 3 ***alors*** *ce nombre est divisible par* 3. » est VRAIE – c'est donc un théorème –.

4 Propriété caractéristique

On dit qu'une **propriété** d'un objet mathématique est **caractéristique** s'il est le seul objet à posséder cette propriété.
Remarque : Pour prouver qu'une propriété est caractéristique, on prouve que l'objet donné possède cette propriété et que **la réciproque est vraie**.

Exemple 6. La propriété « *Le nombre se termine par* 0 *ou* 5. » caractérise les multiples de 5, c'est une propriété caractéristique des multiples de 5.

En effet, si un nombre est multiple de 5 alors il se termine par 0 ou 5 et **réciproquement** si un nombre se termine par 0 ou 5 alors il est divisible par 5.

Il est naturel de donner un nom à un objet mathématique qui a un intérêt particulier. Pour cela, la **définition** doit déterminer parfaitement cet objet (sans ambiguïté).

Si la propriété caractéristique est prise comme définition alors la définition initiale devient une propriété caractéristique.

Exemple 7.

- En prenant comme **définition** « *On appelle triangle isocèle un triangle qui a deux côtés égaux.* », on a le **théorème** « *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.* » et sa **réciproque** « *Un triangle qui a deux angles égaux est isocèle.* ».

  Par conséquent, « *Avoir deux angles égaux* » est une propriété caractéristique du triangle isocèle.
- En prenant comme **définition** « *On appelle triangle isocèle un triangle qui a deux angles égaux.* », on démontre que « *Avoir deux côtés égaux* » est une propriété caractéristique du triangle isocèle.

Explication : Le mot **définition** vient du latin *definitio* signifiant « action de déterminer, de fixer ».

II Règles de déduction

Afin de prouver qu'un énoncé mathématique est vrai, les mathématiciens ont élaboré une démarche spécifique : la **démonstration**.
Dans une démonstration, toute affirmation est soit une **donnée**, soit une **propriété**, soit la conséquence d'une propriété établie à partir de données et suivant des **règles de logique**.

Repères historiques. En 1662, Antoine Arnauld et Pierre Nicole considèrent que la logique est l'étude de l'art de penser.
Plusieurs œuvres d'Aristote (384–322 av. J.-C.) ont été regroupées sous le titre *Organon*, signifiant « instrument ». Il y expose les règles de déduction appelées « syllogismes ». Plus de deux mille ans après, Emmanuel Kant (1724–1804) pensait encore qu'Aristote avait découvert tout ce qui était à connaître en logique.
Les travaux de George Boole (1815–1864) et d'Augustus De Morgan (1806–1871) ont pour objectif de mathématiser la logique d'Aristote. Cette mathématisation se développe avec Gottlod Frege (1848–1925) et la création de langage formel. La logique est devenue une pierre angulaire de la philosophie et des mathématiques, et plus récemment elle l'est aussi devenue pour la linguistique et l'informatique.

1 Raisonnement direct

Le schéma du **raisonnement direct** ou *modus ponens* (règle du détachement) est le suivant :

> *Sachant que l'*énoncé 1 *est vrai et que l'on a la propriété* « énoncé 1 *implique* énoncé 2 »,
> *on déduit que l'*énoncé 2 *est vrai.*

En général l'énoncé « énoncé 1 *implique* énoncé 2 » est un théorème (ou proposition) exprimé sous la forme « ***si*** énoncé 1 ***alors*** énoncé 2 ».

Exemple 8. Soient A et B deux points d'un cercle. On va prouver que le centre du cercle appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Comme les points A et B appartiennent au cercle de centre O alors par définition du cercle on a $OA = OB$. Puis en utilisant le théorème : « *Si $MA = MB$ alors M appartient à la médiatrice de* $[AB]$ », on en déduit que le point O appartient à la médiatrice de $[AB]$.

2 Raisonnement par l'absurde

Le schéma du **raisonnement par l'absurde** est le suivant :

> *Supposons que l'*énoncé 1 *est faux.*
> *On trouve une contradiction,*
> *on en déduit que l'*énoncé 1 *est vrai.*

Exemple 9. On suppose connu le théorème 1 : « *Il existe une unique droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point du plan* ». On va démontrer le théorème 2 : « *Lorsque deux droites distinctes sont perpendiculaires à une même troisième droite, elles sont parallèles entre elles* ».

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites distinctes perpendiculaires à une même droite Δ.

Raisonnons par l'absurde *en supposant que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point M.*

Par conséquent, il passe par le point M deux droites distinctes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ perpendiculaires à Δ. C'est impossible car, d'après le théorème 1, il ne passe par le point M qu'**une seule** droite perpendiculaire à Δ. Par conséquent, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas sécantes, elles sont donc parallèles.

3 Raisonnement par contraposée

Méthode **pour prouver qu'un énoncé est faux.** On peut utiliser la contraposée d'un théorème.

Exemple 10. On va prouver que le triangle ABC tel que $AB = 9$ cm, $AC = 3$ cm et $BC = 5$ cm n'est pas constructible.

On a le théorème (inégalité triangulaire) : « ***Si*** *ABC est un triangle* ***alors*** *$AB < AC + BC$* ».

Sa contraposée est : « ***Si*** *$AB \geqslant AC + BC$* ***alors*** *le triangle ABC n'est pas constructible* ».

Or comme $AC + BC = 8$ et $AB = 9$ alors l'énoncé « $AB \geqslant AC + BC$ » est vrai donc d'après la contraposée, il n'est pas possible de construire un tel triangle.

4 Raisonnement par disjonction des cas

Le schéma du **raisonnement par disjonction des cas** est le suivant :

> *On a deux possibilités : ou bien le cas A, ou bien le cas B.*
> *Or du cas A on déduit que l'*énoncé 1 *est vrai et du cas B on déduit que l'*énoncé 1 *est vrai,*
> *par conséquent, l'*énoncé 1 *est toujours vrai.*

Exemple 11. On va prouver que pour tout nombre entier n, le nombre $(n+5)(3n+2)$ est pair.

Le nombre n est ou bien pair, ou bien impair. Distinguons ces deux cas :

- Cas n pair. On a donc $3n$ pair puis $(3n+2)$ est pair. Par conséquent, le produit $(n+5)(3n+2)$ est pair.
- Cas n impair. On a $(n+5)$ pair. Par conséquent, le produit $(n+5)(3n+2)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit $(n+5)(3n+2)$ est pair.

Remarque : Si un algorithme permet de valider une propriété dans tous les cas possibles – un nombre de cas fini – cet algorithme peut servir de preuve.

Exemple 12. Afin de prouver l'énoncé « *Tout nombre impair compris entre* 5 *et* 99 *est la somme d'une puissance de* 2 *et d'un nombre premier.* », il est possible de réaliser un programme qui teste si une telle décomposition est possible pour tous les nombres impairs entre 5 et 99.

5 Mots utilisés dans un énoncé

Mot	Commentaires
Soit	On l'utilise pour présenter des objets. Par exemple, l'énoncé « Soit ABC un triangle. » signifie que l'on considère un triangle que l'on appelle ABC. On peut le mettre au pluriel quand il y a plusieurs objets. Par exemple : « Soient (d_1) et (d_2) deux droites ».
Construire	On demande une figure précise avec les instruments de géométrie. On peut aussi utiliser **représenter** ou **tracer**. Si on souhaite une figure moins précise, on utilise **dessiner**.
Vérifier que	On demande de montrer qu'un énoncé est vrai pour des cas particuliers.
Conjecturer	On attend un énoncé qui semble vrai.
Démontrer	On attend un raisonnement construit à l'aide de propositions. Synonyme : **prouver que** ou **justifier que**.
En déduire que	On démontre l'énoncé à l'aide de résultats obtenus précédemment.
Calculer	Il faut mettre en valeur les techniques de calcul pour obtenir le résultat.
Résoudre	Utilisé pour les équations.

III Exercices

Ex 1 ☆☆★☆ **Énoncé**

On donne l'énoncé : « *La somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de* 4 ».

1) Vérifier que cet énoncé est vrai pour

a) 5 et 7.
b) 13 et 15.
c) 57 et 59.
d) 2021 et 2023.

2) Zed dit : « *J'ai essayé avec de nombreuses valeurs et j'ai à chaque fois vérifié que l'énoncé est vrai* ». A-t-il démontré cet énoncé ? Justifier la réponse.

3) Comment pourrait-on démontrer cet énoncé ?

Ex 2 ☆☆★☆ **Les boîtes**

On a trois boîtes : une blanche, une rouge et une verte. L'une d'elles contient une barre de chocolat, une autre contient une pomme et la troisième est vide. On sait que la boîte vide est blanche ou rouge. On sait que la pomme n'est ni dans la blanche, ni dans la verte.
Dans quelle boîte est le chocolat ?

Ex 3 ☆☆★☆ **Les sports**

Athéna, Britomartis, Chloris et Déméter pratiquent chacune un sport différent : karaté, foot, volley ou judo.
Athéna n'aime pas les jeux de ballon et la judoka Britomartis va souvent au stade regarder des matchs de foot.
Parmi les affirmations suivantes, indiquer celles qui sont fausses.

A : Athéna joue au volley.
B : Britomartis joue au foot.
C : Athéna pratique le judo.
D : Déméter fait du karaté.
E : Chloris joue au volley.

Ex 4 ☆☆★★ **Les sports**

Trois amis bavardent. Deux font du ping-pong, deux du judo et deux du vélo. Celui qui ne fait pas de vélo ne fait pas le judo. Celui qui ne fait pas de ping-pong ne fait pas de vélo. Quels sports fait chacun d'eux ?

Ex 5 ☆☆★★ **Élection**

Zoé, Yann et Xavier se présentent à l'élection des délégués. Trois camarades Alex, Bob et Chloé discutent :

- Alex dit : « *Si Bob vote pour Zoé, je voterai pour Xavier. Mais si Chloé vote pour Xavier, je voterai pour Yann* ».
- Bob dit : « *Si Alex vote pour Yann, je ne voterai pas pour Xavier. Mais si Chloé vote pour Zoé, je voterai pour Xavier* ».
- Chloé dit : « *Si Alex vote pour Xavier, je ne voterai pas pour Yann* ».

Le jour de l'élection, Alex, Bob et Chloé votent pour des candidats distincts. Pour qui ont-ils voté ?

Ex 6 ☆☆★☆ **Danse**

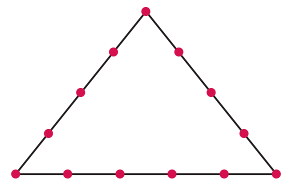
Pour danser le *sirtaki*, cinq personnes doivent se tenir par la taille sur une ligne.
Héra, Athéna, Zeus, Apollon et Poséidon sont volontaires mais une dispute éclate car :

- Athéna veut être à côté de Apollon qui exige de ne pas être à côté de Zeus ;
- Zeus ne veut pas se trouver en extrémité de ligne ;
- Héra ne veut personne à sa droite ;
- Poséidon veut avoir son amie Athéna sur sa gauche.

Comment placer ces cinq personnes ?

Ex 7 ☆☆★★ **Avec des allumettes**

Combien de triangles différents peut-on construire avec treize allumettes ?



Ex 8 ☆☆★☆ **Couleurs**

On dispose de trois formes – carré, disque et triangle – et de trois couleurs – rouge, vert et bleu –. Une forme est d'une seule couleur. Deux formes peuvent avoir la même couleur.
Les trois affirmations suivantes sont vraies :

A1. Si le disque est bleu alors le carré est vert.

A2. Si le disque est vert alors le carré est rouge.

A3. Si le carré n'est pas bleu alors le triangle est vert.

Donner toutes les possibilités (si elles existent).

Ex 9 ☆☆★★ **Vrai-faux**

On considère un ensemble de cent dalles qui sont carrées, hexagonales ou octogonales et qui sont d'une seule couleur bleue, verte ou blanche.
Sachant que toutes les dalles blanches sont carrées on peut en déduire que :

	V	F
1) Aucune dalle hexagonale n'est blanche. . .	❑	❑
2) Aucune dalle blanche n'est hexagonale. . .	❑	❑
3) Si une dalle est carrée alors elle est blanche.	❑	❑
4) Si une dalle est blanche alors elle est carrée.	❑	❑
5) Pour qu'une dalle soit blanche, il suffit qu'elle soit carrée.	❑	❑

Ex 10 ☆☆★☆ Kangourou

Un élève doit deviner un nombre entier. Ses camarades lui disent :

- Cunégonde : « *C'est le nombre 9* » ;
- Guenièvre : « *Le nombre se termine par 7 ou 5* » ;
- Perceval : « *Le nombre est pair* » ;
- Nicéphore : « *C'est le nombre 15* ».

Une seule des filles et un seul des garçons ont dit la vérité. Quel est ce nombre ?

Ex 11 ☆☆★☆ Les chapeaux

Trois bandits parlent du shérif.

- Joe dit : « *On m'a dit qu'il a plus de cent chapeaux* ».
- Jack dit : « *Jamais de la vie ! Je peux te dire qu'il a moins de cent chapeaux* ».
- William dit : « *Disons qu'il possède au moins un chapeau* ».

Si un seul de ces trois énoncés est vrai, combien de chapeaux le shérif possède-t-il ?

Ex 12 ☆☆★★ Le siffleur

« *Qui a sifflé ?* » demande le professeur de maths en s'adressant au groupe de quatre élèves assis au fond de la classe.

- Joe affirme : « *C'est Jack* » ;
- Jack déclare : « *C'est Averell* » ;
- William conteste : « *Ce n'est pas moi !* » ;
- Averell dit : « *Jack ment lorsqu'il dit que j'ai sifflé* ».

Sachant que trois élèves sur quatre ont menti, qui a sifflé ?

Ex 13 ☆☆★☆ Propriété caractéristique

1) Donner une définition d'un triangle équilatéral. Énoncer une propriété caractéristique.
2) Donner une définition de la médiatrice d'un segment. Énoncer une propriété caractéristique.
3) Donner une définition de trois points A, B, C alignés dans cet ordre. Énoncer une propriété caractéristique.

Ex 14 ☆☆★★ Cartes

Chacune des cartes représentées ci-dessous porte une lettre sur une face et un nombre sur l'autre.

Athéna dit : « *si une carte porte une voyelle sur une face alors elle porte un nombre pair sur l'autre face* ».

Quelle(s) carte(s) AU PLUS suffit-il de retourner pour vérifier si Athéna dit la vérité ? Justifier.

1) **Cas 1 :**

$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{M}$

2) **Cas 2 :**

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$

Ex 15 ☆☆★★ Démonstration

On considère la liste de théorèmes :

Th1 : *Si un jeune fait du sport alors il transpire.*

Th2 : *Si un jeune se couche tard alors il est fatigué.*

Th3 : *Si un jeune se douche alors il met de l'eau partout dans la salle de bain.*

Th4 : *Si un jeune se douche alors il est propre.*

Th5 : *Si un jeune met de l'eau partout dans une pièce alors il doit nettoyer les sols.*

Th6 : *Si un jeune transpire alors il se douche.*

Th7 : *Si un jeune est fatigué alors il s'endort sur son bureau.*

1) Vendredi soir, Zed a regardé pendant des heures une série télévisée. Démontrer que Zed s'endort sur son bureau.
2) Dimanche, Zed a fait un tournois de football. Son équipe a perdu en finale. Démontrer que Zed va devoir nettoyer le sol de la salle de bain.

Ex 16 ☆☆★★ Démonstration

On considère la liste de théorèmes :

Th1 : *S'il fait nuit alors les enfants sont en pyjama.*

Th2 : *Si un enfant fait des maths alors ses parents sont contents.*

Th3 : *Si un enfant est fatigué alors il s'endort sur son bureau.*

Th4 : *Si les parents sont contents et que les enfants sont en pyjama alors le samedi suivant la famille ira au cinéma.*

1) Il est midi et Igrek fait des maths. Peut-on conclure qu'il ira au cinéma le samedi suivant ?
2) Il est minuit et Igrek fait des maths. Peut-on conclure qu'il ira au cinéma le samedi suivant ?

Ex 17 ☆☆★★ Angles

On considère la liste de théorèmes :

Th1 : *Si $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAz}$ sont adjacents, alors $\widehat{xAz} = \widehat{xAy} + \widehat{yAz}$.*

Th2 : *Si $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAz}$ sont supplémentaires, alors $\widehat{xAy} = 180° - \widehat{yAz}$.*

Th3 : *Dans un triangle, la somme des angles est $180°$.*

Th4 : *Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base sont égaux.*

Th5 : *Si deux angles d'un triangle sont égaux, alors le triangle est isocéle.*

Dans la figure, le triangle ABC est isocèle de sommet principal A et $\widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC} = 36°$.